一道高考解析几何解答题的解法探究

■厦门大学附属实验中学　袁海军

2018 年高考全国 I 卷理数第 19 题是一道解析几何题，背景是直线与椭圆的位置关系，重点考查有关圆锥曲线的定值问题. 此题的难度是近三年最简单的，位置也由以往的第 20 题往前移了一位变成第 19 题，成为考生重点得分的中档题，可能是为了更好的迎接新高考改革所作的铺垫.

引例：（2018 年高考全国 I 卷理数第 19 题）设椭圆 $C:\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A,B 两点，点 M 的坐标为 $(2,0)$.

（1）当 l 与 x 轴垂直时，求直线 AM 的方程；

（2）设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

解析：（1）由已知得 $F(1,0)$，l 的方程为 $x=1$，联立椭圆方程可得，点 A 的坐标为 $(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$ 或 $(1,-\frac{\sqrt{2}}{2})$. 所以 AM 的方程为 $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+\sqrt{2}$ 或 $y=\frac{\sqrt{2}}{2}x-\sqrt{2}$.

第一小问考生基本没有什么问题，轻松地拿到这一块的分数. 以下就第二小问提供几种解法：

解法 1：（代数法）

（2）当 l 与 x 轴重合时，$\angle OMA=\angle OMB=0°$.

当 l 与 x 轴垂直时，OM 为 AB 的垂直平分线，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

当 l 与 x 轴不重合也不垂直时，设 l 的方程为 $y=k(x-1)$ $(k\neq 0)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，

则 $x_1<\sqrt{2}$，$x_2<\sqrt{2}$，直线 MA，MB 的斜率之和为 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-2}+\frac{y_2}{x_2-2}$.

由 $y_1=kx_1-k$，$y_2=kx_2-k$ 得 $k_{MA}+k_{MB}=\frac{2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k}{(x_1-2)(x_2-2)}$.

将 $y=k(x-1)$ 代入 $\frac{x_2}{2}+y_2=1$ 得 $(2k^2+1)x^2-4k^2x+2k^2-2=0$.

所以，$x_1+x_2=\frac{4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\frac{2k^2-2}{2k^2+1}$.

$2kx_1x_2-3k(x_1+x_2)+4k=\frac{4k^3-4k-12k^3+8k^3+4k}{2k^2+1}=0$.

从而 $k_{MA}+k_{MB}=0$，故 MA，MB 的倾斜角互补，所以 $\angle OMA=\angle OMB$.

综上，$\angle OMA=\angle OMB$.

点评：此法也是解析几何常见的解题套路——“联立方程、代入消元、韦达定理和判别式”. 但在求解中要注意三点：(1) 需要分类讨论直线斜率两种特殊情形；(2) 代入消元时要有整体思想，无需求出 x_1，x_2 具体的值；(3) 在证明目标时需作相应的等价转化——将要证明的两个角相等转化到两直线的倾斜角互补，即两直线斜率之和为零.

解法 2：（几何法）

利用圆锥曲线第二定义：易得点 M 是椭圆的准线与 x 轴的交点，设点 A、B 分别到准线的距离记为 $d_1=|AP|$，$d_2=|BQ|$，则依题意得：

$$\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|y_A|}{|y_B|}=\frac{d_1}{d_2}=\frac{|AP|}{|BQ|}=\frac{|MP|}{|MQ|}\Rightarrow\Delta APM\sim\Delta BQM,\therefore\frac{|AF|}{|BF|}=\frac{|AM|}{|BM|}.$$

所以 ΔABM 在中，MO 是 $\angle AMB$ 的内角平分线，即 $\angle OMA=\angle OMB$.

点评：此法纯几何法，简单地运用了椭圆的第二定义，首先转化到证明两个三角形相似，后转化到内角平分线定理的应用. 证明过程非常巧妙，步骤简洁明了，但现行的教材对圆锥曲线的第二定义只作阅读了解，没有作理解和掌握的层次要求，因此对于考生来说显然超出其能力要求.

如果本题作为一道小题来讲，它考查了直线和椭圆的一个定值问题，也就是一个二级结论，接下来我们可以作进一步的探讨，导出它的一般结论.

示例：设椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）的右焦点为 F，过 F 的直线 l 与 C 交于 A，B 两点，点 M 的坐标为（$\frac{a^2}{c}$，0），设 O 为坐标原点，证明：$\angle OMA=\angle OMB$.

证明：设直线方程为 $x=ty+c$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ x=ty+c\end{cases}\Rightarrow(a^2+b^2t^2)y^2+(2b^2tc)y+b^2c^2-a^2b^2=0$，

$\therefore y_1+y_2=-\frac{2b^2tc}{a^2+b^2t^2}$，$y_1y_2=\frac{b^2c^2-a^2b^2}{a^2+b^2t^2}$.

所以直线 MA，MB 的斜率之和为：

$$k_{MA}+k_{MB}=\frac{y_1}{x_1-\frac{a^2}{c}}+\frac{y_2}{x_2-\frac{a^2}{c}}=\frac{2ty_1y_2-(c-\frac{a^2}{c})(y_1+y_2)}{(x_1-\frac{a^2}{c})(x_2-\frac{a^2}{c})}=$$

$$\frac{2tb^2(c^2-a^2+a^2-c^2)}{(x_1-\frac{a^2}{c})(x_2-\frac{a^2}{c})}=0.$$